فريق الكرنات الحمراء التطوعي

عملي 30 S.P 8 05

اسم المحاضرة
المتسلسلات

اسم ~~الدكتور~~ استاذ همام جلالة

التاريخ :

RBHAMAK

اسم المادة
رياضيات

مجموع n حد من متسلسلة حسابية يعطى بالعلاقة :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n\left[a_1 + \frac{n-1}{2} d\right]$$

(d ← خطوة)

مجموع n حد من متسلسلة هندسية يعطى بالشكل :

$$\sum_{k=1}^{n} = a_1\left[\frac{1-q^n}{1-q}\right]$$

(q ← الأساس)

ملاحظات هامة ..

$\lim q^n = 0 \quad : |q| < 1$

$\lim q^n = \infty \quad : |q| > 1$

$\lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

$\lim \left(\frac{3}{2}\right)^n = (1,5)^\infty = \infty$

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Scanned by CamScanner

متتالية جاميع الجزئية

نسميا مجموع n حد الأولى من السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ المجموع الجزئي النوني ونرمزه S_n ونسمي المتتالية $\{S_n\}$ متتالية جاميع الجزئية لمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

نقول أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ومجموعها b إذا كانت متتالية جاميع الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة من عدد b

ملاحظة 1: إذا كانت متتالية الجاميع الجزئية في المتسلسلة ما متباعدة نقول ان هذه المتسلسلة متباعدة

مبرهنة هامة: كل متسلسلة لا يسعى حدها العام نحو الصفر تكون متباعدة.

ملاحظة 2: إذا كانت المتسلسلة يسعى حدها العام نحو الصفر فليس من الضروري أن تكون متقاربة.

مبرهنة: سلسلة ريمان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ تكون متقاربة عندما $\alpha > 1$ ومتباعدة عندما $\alpha \le 1$

اختبار المقارنة: إذا كان لدينا سلسلتان حدود احدهما أصغر من الحدود الأخرى فأنه من تقارب الكبيرة ينتج تقارب الصغيرة ومن تباعد الصغيرة ينتج تباعد الكبيرة

ملاحظة 3: يستخدم كثيراً عندما لا يوجد عاملي (!) ولا يوجد قوة n ـ اختبار مقارنة.

اختبار دالامبير:

إذا كانت النهاية $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ موجودة تكون المتسلسلة:

1. متقاربة عندما $\lambda < 1$
2. متباعدة عندما $\lambda > 1$
3. حالة شك $\lambda = 1$

Scanned by CamScanner

اختبار كوشي:

لتكن مجموع $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ونفرض أن $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ عندئذٍ:

$\lambda < 1$ متقاربة ، $\lambda > 1$ متباعدة ، $\lambda = 1$ حالة شك

ليبنتز: إذا كانت المتتالية a_n متناقصة وصفرية تكون متسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

ملاحظة: إذا كانت المتسلسلتان $\sum a_k$ ، $\sum b_k$ تحقق العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$$

عندئذٍ السلسلتان من نوع الواحد

ونستفيد من مبرهنة ريمان

- اختبار راب:

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة وكانت $\lim \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] = L$

$L > 1$ متقاربة ، $L < 1$ متباعدة.

* ادرس طبيعة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$1+2+3 \dots \infty$ متتالية المجاميع الجزئية تعطى بالعلاقة:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = n\left(a_1 + \frac{n-1}{2} d\right)$$

$$= n\left(1 + \frac{n-1}{2} \cdot 1\right)$$ نوحد المقامات.

$$= n\left[\frac{n+1}{2}\right] \to +\infty$$ متباعدة

الحد العام n لا يسعى نحو الصفر بل إنه يسعى نحو اللانهاية وهي متباعدة.

* ادرس طبيعة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ الحد العام

$$S_n = \begin{cases} -1 & n \text{ فردي} \\ 0 & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

متتالية مجاميع الجزئية لاتملك نهاية معينة فالمتسلسلة متباعدة.

طريقة ٢: الحد العام لا يسعى نحو الصفر فهي متباعدة.

* ادرس طبيعة المتسلسلة وأوجد مجموع المتسلسلة في حالة التقارب:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

مجموع متسلسلة الهندسية

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\lim \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

طبيعتها متقاربة ومجموعها يساوي 3.

* ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+2n}$

نقارن مع متسلسلة $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$= \frac{\frac{1}{4n^2+2n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4n^2+2n} \cdot \frac{n^2}{1} = \frac{n^2}{4n^2+2n} \to \frac{1}{4} \neq 0$$

متقاربة بشرط المتسلسلتان من طبيعة واحدة.

طريقة ٢: نقارن $\frac{1}{4n^2+2n} < \frac{1}{n^2}$

من تقارب كبيرة ينتج تقارب صغيرة.

Scanned by CamScanner

ملاحظة: متسلسلة $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة حسب ريمان.

متسلسلة $\sum \frac{1}{n^3}$ متقاربة حسب ريمان.

* ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n x$

الحد العام لا يسعى نحو الصفر فهي متباعدة

* ادرس تقارب متسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ حسب دالامبير

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{(n+1)\, n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to$$

$e > 1$ متباعدة.

* ادرس طبيعة متسلسلة $\sum n \left(\frac{3n^2+2}{2n^2+1}\right)^n$

حسب كوشي

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n\left(\frac{3n^2+2}{2n^2+1}\right)^n}$$

$$= \sqrt[n]{n} \;\; \frac{3n^2+2}{2n^2+1}$$

$$\longrightarrow 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} > 1$$ متباعدة.

* ادرس تقارب المتسلسلة $\sum \frac{3^n}{n!}$

$$a_n = \frac{3^n}{n!} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3^n \cdot 3}{(n+1)\, n!} \cdot \frac{n!}{3^n}$$

$$\frac{3}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$$

فهي متقاربة حسب دالامبير.

Scanned by CamScanner

متسلسلات القوى:

$$\sum_{n=1} a_n (x-x_0)^n$$

x_0 ← مركز المتسلسلة

حيث $x_0 = 0$

$$\sum_{n=1} a_n x^n$$

- إيجاد نصف قطر التقارب ومنطقة التقارب أو المجال للمتسلسلة القوى:

نفرض لدينا المتسلسلة $\sum_{n} a_n (x-x_0)^n$

نحسب نصف قطر التقارب ρ بشكل

1- حسب دالامبير $\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$\rho = \frac{1}{\lambda}$ نصف قطر التقارب

2- حسب كوشي: $\lambda = \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{a_n} \right|$ ويكون مجال التقارب:

$\lambda = \infty$ متقاربة دائماً $]x_0 - \rho , x_0 + \rho[$ مع مراعاة دراسة طرفي المجال

$\lambda = 0$ ، عدم تقارب متسلسلة القوى عند مركزها دائماً

* 1 احسب نصف قطر التقارب ومجال التقارب لمتسلسلة القوى $\sum \frac{1}{n} (x-3)^n$

$a_n = \frac{1}{n}$, $x_0 = 3$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

حيث $\lambda = 1$

أو بطريقة كوشي:

$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$

$\lambda = 1$

$\rho = \frac{1}{\lambda} = 1$ $]2,4[$

نعوض عندما $x=2$ $\sum \frac{1}{n} (-1)^n$ $[2,4[$

$\frac{1}{n}$ متناقصة وصفرية حسب ليبنتز

عندما $x=4$ $\sum \frac{1}{n}$ متباعدة حسب ريمان . $[2,4[$

Scanned by CamScanner

ملاحظة: إذا متباعدة نقفل المجال والعكس صحيح

* أوجد نصف قطر التقارب أو مجال التقارب للسلسلة القوى $\sum \frac{e^n x^n}{n!}$

حسب دالامبير: حيث: $a_n = \frac{e^n}{n!}$ ، $a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^n}$$

$$= \frac{e^n \cdot e}{(n+1)\, n!} \cdot \frac{n!}{e^n} \to 0$$

$\rho = \infty \Leftarrow \lambda = 0$

$]-\infty, +\infty[$ متقاربة في كل مكان

* أوجد نصف قطر التقارب ومجال التقارب للسلسلة القوة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$

حسب كوشي:

$$\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} \to \frac{1}{1} = 1$$

$\rho = 1 \Leftarrow \lambda = 1$

$x_0 = 0$ $\quad]-1, 1[$

عند $x = -1$ $\sum \frac{n}{n+1}(-1)^n$ متباعدة لأن الحد العام لا يسعى نحو الصفر

$x = 1$ $\sum \frac{n}{n+1}$ متباعدة لأن الحد العام لا يسعى نحو الصفر $]-1, 1[$

ادرس طبيعة السلسلة $\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ وأوجد مجموعها $a_n = \frac{1}{n^2+n}$ ، $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^2+n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^2+n} \cdot \frac{n^2}{1} = \frac{n^2}{n^2+n} \to 1 \neq 0$$

السلسلتان من نوع واحد فإن السلسلة متقاربة.

طريقة أخرى: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$ بتوحيد المقامات وحذفها.

$$1 = An + A + Bn \Rightarrow A + B = 0, \quad A = 1$$

$1 = (A+B)n + B \} \quad B = -1$

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$S_n \qquad n$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$- \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\Longrightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

Scanned by CamScanner